

«Oh, Dio mio, un'altra volta le frazioni!»

Bruno D'Amore^{1 2} e Martha Isabel Fandiño Pinilla¹

¹*NRD, Università di Bologna*

²*Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá*

1.

Per meglio “controllare” gli ostacoli all'apprendimento, Guy Brousseau ci ha insegnato a fare prendere in esame la storia delle discipline. Quella delle frazioni, all'apparenza semplice, rivela in realtà numerosi spunti di grande interesse. La storia delle frazioni è lunga e curiosa. Belle testimonianze iniziano in Egitto, fin dal 3000: le frazioni, soprattutto unitarie, $\frac{1}{n}$, erano usate in sofisticati problemi (D'Amore & Sbaragli, 2008).

“Frazione” viene dal tardo latino “fractio”, cioè “parte ottenuta spezzando”, dunque dal verbo “frangere”, cioè “spezzare”. Pertanto, è sbagliato pensare che, nel significato originale etimologico di “frazione”, sia già compresa la richiesta che le parti ottenute con l'azione di spezzare siano “uguali”.

Il simbolo $\frac{m}{n}$ ha origine incerta, ma certo fu usato da Leonardo detto Fibonacci Pisano (circa 1170-1242) nel suo *Liber Abaci* del 1202; i numeri frazionari sono ivi chiamati “rupti” o anche “fracti” e il trattino posto tra numeratore e denominatore è chiamato “virgula” cioè “bastoncello” (da “virga”, bastone).

Anche le parole “numeratore” e “denominatore” hanno origine incerta, ma sappiamo che si affermarono nel corso del XV secolo in Europa.

La distinzione tra frazioni “proprie”, “improprie”, “apparenti” è del XVIII secolo.

La rappresentazione dei numeri decimali è dovuta all'opera di Simone di Bruges detto Stevin (1548-1620). Costui, però, non usava la virgola ma tutt'altro simbolismo; scriveva per esempio 34□6□5□2□ per indicare 34,652.

Il passaggio dal “Sapere” (accademico) al “sapere appreso” (dall'allievo) è il risultato di un lungo e delicatissimo percorso che porta dapprima al “sapere da insegnare”, poi al sapere “insegnato”, per giungere al “sapere appreso” (Fandiño Pinilla et al., 2018). In tale successione di passaggi, il primo, quello che trasforma il “Sapere” in “sapere da insegnare”, si chiama *trasposizione didattica* e costituisce un momento di grande rilevanza, un momento nel quale la professionalità e la creatività dell'insegnante si esprimono al massimo livello.

Vi è una grande differenza cognitiva tra “frazione” e “numero razionale”; l'allievo fra i 10 e i 15 anni non ha la maturità critica o la capacità cognitiva di costruire un Sapere come quello (Fandiño Pinilla, 2021). Tuttavia, tra i “saperi appresi”, la storia, la consuetudine e l'attuale società considerano doveroso

includere l'insieme Q^a dei razionali assoluti. Ne fanno parte esplicita, per esempio: l'uso della virgola, i numeri decimali (non solo quelli compresi tra 0 e 1) e così via. Lo stesso sistema monetario di quasi tutte le nazioni prevede una certa qual competenza da parte del cittadino comune sui numeri razionali assoluti; il sistema internazionale delle misure lo ha fatto proprio fin dalla fine del XVIII secolo, rendendolo necessario; in qualsiasi mestiere, anche il più umile, è necessario capire il significato intuitivo di 0,5 o di 2,5.

Dunque: i numeri razionali hanno uno statuto sociale che li rende competenze auspicabili per tutti.

Tuttavia, non è possibile far apprendere a dominare Q^a né nella scuola primaria né in quella secondaria di I grado nella forma matematica formalmente corretta.

Si rende così evidentemente necessaria un'azione di trasposizione didattica che permetta di trasporre Q^a in qualche cosa che sia accessibile all'allievo di primaria e poi di secondaria. La storia dell'insegnamento della matematica ha da sempre indicato il percorso di questa trasposizione in uno schema come il seguente: le frazioni (scuola primaria e secondaria), numeri con la virgola (scuola primaria e secondaria), Q^a (scuola secondaria di II grado o, talvolta, università).

“Trasposizione didattica” non è sinonimo di “semplificazione”, come si potrebbe ingenuamente credere; a volte i concetti attraverso i quali siamo costretti a far passare il nostro allievo sono irti di complicazioni, rispetto al “Sapere”. Per esempio, nelle frazioni sorgono mille problemi concettuali costituiti da oggetti di sapere che non esistono in Q^a . Si pensi alle frazioni improprie o apparenti; la loro presenza è ingombrante e complessa, irta di difficoltà cognitive, mentre in Q^a questa casistica neppure esiste. Detto in altre parole, se si potesse evitare il passaggio attraverso le frazioni e puntare direttamente sui numeri razionali assoluti, sarebbe forse più facile e naturale. Ma ciò è impossibile. L'idea di passare attraverso le frazioni sembra ancora il modo più naturale, ma non sappiamo se è davvero il più efficace. Certo, è pieno di difficoltà. Dunque, le frazioni, pur non facendo parte di un “Sapere” accademico, si presentano all'attenzione della didattica della matematica come un oggetto di sapere, un sapere che potremmo chiamare “scolastico”.

2.

L'introduzione del concetto di frazione sembra essere tradizionalmente simile in tutto il mondo; una data unità concreta viene divisa in parti *uguali*, poi di tali parti se ne prendono alcune. Questa accezione intuitiva di frazione dell'unità ha il vantaggio di essere chiara e facilmente acquisibile; ha inoltre il vantaggio di essere facilmente modellizzata nella vita quotidiana; ma ha il difetto di non essere poi teoricamente sufficiente, di fronte alle varie e multiformi interpretazioni che si vogliono/devono dare all'idea di frazione.

Detto in altre parole: una sola “definizione” di frazione non basta.

Quando lo studente, fra gli 8 e gli 11 anni, ha capito che $\frac{3}{4}$ rappresenta l'operazione concreta di dividere una certa unità in 4 parti *uguali* delle quali se ne considerano 3, si ha l'illusione che tutto stia andando per il meglio; ma, subito dopo, ci si accorge che proprio la facilità di costruzione di quella conoscenza sta bloccando la strada, sta funzionando da ostacolo per il successivo vero apprendimento. È sì una conoscenza, ma inadeguata per proseguire nella costruzione delle conoscenze corrette considerate successive; per esempio: se abbiamo una unità divisa in 4 parti *uguali*, che cosa significa, da questo punto di vista, prenderne $i\frac{5}{4}$?

Sembra, a volte, che neppure alcuni insegnanti si rendano conto di questa situazione cognitiva e concettuale così complessa; ci pare dunque opportuno dedicare molta attenzione ai vari modi di intendere il concetto di “frazione” che si vorrebbe far acquisire all'allievo.

A questo punto sarebbe necessario fornire un panorama della ricerca internazionale in questo delicato settore, certo uno dei più coltivati in tutto il mondo. Citare tutte le ricerche è impossibile, vista la vastità del loro numero che supera ogni immaginazione; rinviando a Fandiño Pinilla (2005) nel quale sono analizzate centinaia di ricerche compiute tra il 1960 ed il 2005, effettuate in tutto il mondo.

Bibliografia

- D'Amore B., Sbaragli S. (2018). *La matematica e la sua storia: II Dal tramonto greco al Medioevo*. Bari: Dedalo. [Prefazione di Paolo Freguglia.]
- Fandiño Pinilla, M.I. (2021). *Le frazioni: Matematica, storia e didattica*. Pitagora. [Nuova edizione: (2023), Bologna: Bonomo].
- Fandiño Pinilla, M.I., & Pedagogica-Locarno, A.A.S. (2005). *Le frazioni: aspetti concettuali e didattici*. Pitagora.
- Fandiño Pinilla, M.I., Santi, G.R., & Sbaragli, S. (2008). *Insegnamento e apprendimento delle frazioni in aula*. Bologna: Archetipolibri. [Prefazione di Bruno D'Amore.]

Parole chiave: storia delle discipline; frazioni; Sapere.